

In un paese scandinavo il 70% delle ragazze ha i capelli biondi, il 20% li ha rossi, il 10 % mori. Risulta poi che ha gli occhi scuri il 10 % delle bionde, il 25% delle rosse, il 50 % delle more. Se la ragazza con cui ho fatto amicizia tramite internet mi fa sapere che ha gli occhi scuri, che probabilità c'è che sia bionda?

Proviamo a risolvere insieme questo esercizio sulla probabilità utilizzando il **Teorema di Bayes**:

$$P(B|S) = \frac{P(B) P(S|B)}{P(S)}$$

concetto fondamentale nella teoria della probabilità e nella statistica che permette di valutare la probabilità di una ipotesi, data una certa evidenza.

N.B.: dati due eventi B ed S , la probabilità dell'intersezione di due eventi $P(B \cap S)$ è data dalla formula $P(B \cap S) = P(B) \cdot P(S|B)$.

Segue che la formula di Bayes per il calcolo di $P(B|S)$ può essere riscritta equivalentemente come

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}.$$

Iniziamo **nominando gli eventi**:

- B = ragazze con i capelli biondi;
- R = ragazze con i capelli rossi;
- M = ragazze con i capelli mori;
- S = ragazze con gli occhi scuri;
- \bar{S} = ragazze che non hanno gli occhi scuri.

A questo punto possiamo **schematizzare i dati forniti**:

nel paese abbiamo quindi la probabilità del 70% di ragazze bionde di cui solo il 70% ha gli occhi scuri di conseguenza abbiamo che:

à $P(B)=0,70$ probabilità di ragazze bionde;

à $P(S|B)=0,10$ probabilità di ragazze bionde sapendo che hanno gli occhi scuri;

à $P(\bar{S}|B)=0,90$ probabilità di ragazze bionde sapendo che NON hanno gli occhi scuri.

Abbiamo la probabilità del 20% di ragazze rosse di cui solo il 25 % possiede gli occhi scuri e il restante 75% non li possiede:

à $P(R)=0,20$ probabilità di ragazze rosse;

à $P(S|R)=0,25$ probabilità di ragazze rosse sapendo che hanno gli occhi scuri;

à $P(\bar{S}|R)=0,75$ probabilità di ragazze rosse sapendo che NON hanno gli occhi scuri.

Infine, abbiamo la probabilità del 10% di ragazze more di cui il 50% hanno gli occhi scuri e il restante 50% non ha gli occhi scuri:

à $P(M)=0,10$ probabilità di ragazze more;

à $P(S|M)=0,50$ probabilità di ragazze more sapendo che hanno gli occhi scuri;

à $P(\bar{S}|M)=0,50$ probabilità di ragazze more sapendo che NON hanno gli occhi scuri.

Non ci resta che **scrivere e calcolare la probabilità che la nostra amica con gli occhi scuri sia bionda** utilizzando il Teorema di Bayes:

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}$$

Calcoliamo come prima cosa la probabilità che una ragazza abbia gli occhi scuri, ossia $P(S)$:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(B) \cdot P(S|B) + P(R) \cdot P(S|R) + P(M) \cdot P(S|M) = \\ &= (0,70 \cdot 0,10) + (0,20 \cdot 0,25) + (0,10 \cdot 0,50) = 0,17 \end{aligned}$$

Ora calcoliamo la probabilità di avere una ragazza bionda con gli occhi scuri, ossia $P(B \cap S)$:

$$P(B \cap S) = P(B) \cdot P(S|B) = 0,70 \cdot 0,10 = 0,07$$

Infine, calcoliamo la probabilità che la nostra amica con gli occhi scuri sia bionda, ossia $P(B|S)$:

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,07}{0,17} \sim 0,4118$$

In conclusione: la probabilità che la ragazza sia bionda sapendo che ha gli occhi scuri è circa del 41%.