

ESERCIZIO: Scelta del Consumatore, Effetto Reddito ed Effetto Sostituzione (Slutsky)

Le preferenze di un consumatore per i beni Y_1 e Y_2 sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità Cobb-Douglas:

$$U(Y_1, Y_2) = Y_1 \cdot Y_2$$

Il reddito a disposizione del consumatore è $I = 120$. I prezzi di mercato dei due beni sono inizialmente $P_1 = 4$ e $P_2 = 2$.

- Calcolare il Saggio Marginale di Sostituzione (SMS) e trovare le funzioni di domanda generiche per i due beni.
- Calcolare il paniere ottimo iniziale (E_0).
- Si supponga che il prezzo del bene 1 diminuisca diventando $P'_1 = 2$. Calcolare il nuovo paniere ottimo (E_1) e l'Effetto Prezzo (EP) totale sul bene Y_1 .
- Scomporre l'Effetto Prezzo in Effetto Sostituzione (ES) ed Effetto Reddito (ER) secondo la metodologia di Slutsky.

Soluzione

a) Il Saggio Marginale di Sostituzione è il rapporto (in valore assoluto) tra le utilità marginali dei due beni:

$$UM_1 = \frac{\partial U}{\partial Y_1} = Y_2 \quad ; \quad UM_2 = \frac{\partial U}{\partial Y_2} = Y_1$$

$$SMS = \frac{UM_1}{UM_2} = \frac{Y_2}{Y_1}$$

Per trovare le funzioni di domanda generiche, impostiamo il sistema che massimizza l'utilità vincolata, eguagliando il SMS al rapporto tra i prezzi e inserendo il vincolo di bilancio:

$$\begin{cases} \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{P_1}{P_2} \\ I = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} P_2 Y_2 = P_1 Y_1 \\ I = P_1 Y_1 + (P_1 Y_1) \end{cases}$$

Risolvendo per Y_1 e Y_2 , otteniamo le funzioni di domanda (essendo gli esponenti della Cobb-Douglas uguali, il reddito si divide a metà):

$$Y_1^* = \frac{I}{2P_1} \quad ; \quad Y_2^* = \frac{I}{2P_2}$$

b) Sostituendo i valori forniti ($I = 120$, $P_1 = 4$, $P_2 = 2$):

$$Y_1^* = \frac{120}{2(4)} = \frac{120}{8} = 15$$

$$Y_2^* = \frac{120}{2(2)} = \frac{120}{4} = 30$$

Il paniere ottimo iniziale è $E_0 = (15; 30)$.

c) Con il nuovo prezzo $P'_1 = 2$, calcoliamo il nuovo equilibrio:

$$Y_1^{**} = \frac{120}{2(2)} = \frac{120}{4} = 30$$

$$Y_2^{**} = \frac{120}{2(2)} = 30 \text{ (la quantità di } Y_2 \text{ non varia per la forma della Cobb-Douglas)}$$

Il nuovo paniere ottimo è $E_1 = (30; 30)$.

L'Effetto Prezzo (EP) su Y_1 è la variazione totale della quantità domandata:

$$EP = Y_1^{**} - Y_1^* = 30 - 15 = 15$$

d) Per scomporre l'effetto prezzo secondo **Slutsky**, dobbiamo calcolare il reddito compensato (I'), ovvero il livello di reddito teorico che permetterebbe al consumatore di acquistare l'esatto *paniere iniziale* (E_0) ai nuovi prezzi.

$$I' = P'_1 Y_1^* + P_2 Y_2^* = 2(15) + 2(30) = 30 + 60 = 90$$

Ora cerchiamo il paniere intermedio (E_S), ovvero la scelta ottima del consumatore con i nuovi prezzi e il reddito compensato. Utilizziamo le funzioni di domanda generiche calcolate al punto a con $I = 90$:

$$Y_1^S = \frac{I'}{2P'_1} = \frac{90}{2(2)} = \frac{90}{4} = 22,5$$

$$Y_2^S = \frac{I'}{2P_2} = \frac{90}{2(2)} = 22,5$$

L'Effetto Sostituzione (ES) è la variazione della domanda dovuta esclusivamente al cambiamento dei prezzi relativi, a potere d'acquisto reale costante:

$$ES = Y_1^S - Y_1^* = 22,5 - 15 = 7,5$$

L'Effetto Reddito (ER) è la variazione della domanda dovuta all'aumento del potere d'acquisto generato dalla diminuzione del prezzo:

$$ER = Y_1^* - Y_1^S = 30 - 22,5 = 7,5$$

Verifica: $EP = ES + ER \implies 15 = 7,5 + 7,5$. L'uguaglianza è rispettata.