Soluzione particolare delle equazioni di Navier-Stokes

Risolvere le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile, in regime stazionario, con campo di velocità $\vec{u} = (u(y), 0,0)$, che scorre tra due lastre piane e parallele tra loro, entrambe ferme. Si trascurino le forze di volume e si assuma un gradiente di pressione uniforme allineato con la direzione x, lungo cui si estendono le lastre.

Partiamo dalle equazioni di Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\vec{u})\right) = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2(\vec{u}) + \vec{f}$$

dove ρ è la densità del fluido, μ la viscosità dinamica, p la pressione e $\vec{f}$ la densità di forze di volume. Il termine $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\vec{u})$ rappresenta la convezione, mentre $\nabla^2(\vec{u})$ descrive gli effetti viscosi. Poiché il flusso è stazionario, vale $\partial\vec{u}/\,\partial t = 0$. Inoltre, la velocità dipende solo da y e ha componente solo lungo x, per cui il termine convettivo vale

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\vec{u}) = u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

dato che u non dipende da x. Le altre componenti della convezione sono nulle perché le componenti di $\vec{u}$ lungo y e z sono zero, quindi il termine convettivo si annulla completamente.

Come specificato nel testo del problema, consideriamo trascurabile il termine $\vec{f}$.

Proiettiamo ora l'equazione vettoriale lungo gli assi coordinati:

- Lungo x

  $$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

  dato che, per definizione di Laplaciano, vale

  $$\nabla^2(\vec{u}) = \frac{\partial^2 u(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(y)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2}$$

- Lungo y e z

  $$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

  coerentemente con l'ipotesi di un gradiente di pressione uniforme lungo x. Inoltre, notiamo che il Laplaciano della velocità è 0 in quanto il vettore $\vec{u}$ ha componenti nulle lungo y e z.

Abbiamo così ottenuto la forma semplificata delle equazioni di Navier-Stokes per questo flusso:

$$\mu\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine in y. Le condizioni al contorno derivano dalla presenza delle lastre ferme: se indichiamo con h la distanza tra le lastre, ponendo $y = 0$ sulla lastra inferiore e $y = h$ sulla lastra superiore, otteniamo le condizioni al contorno

$$u(0) = u(h) = 0$$

Integrando due volte rispetto a y l'equazione trovata otteniamo:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$$

dove C_1e C_2 sono le costanti di integrazione, da determinare imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{dp}{dx}h \end{cases}$$

Sostituendo le costanti si ottiene il profilo di velocità finale

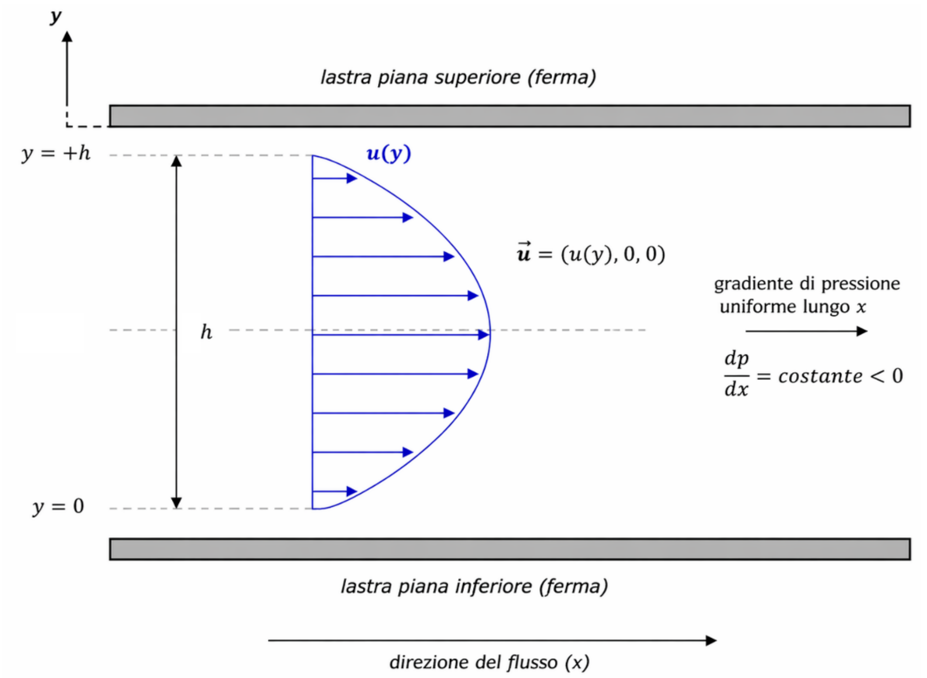
$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy)$$

che è parabolico, tipico del flusso di Couette nel caso particolare con entrambe le lastre ferme. Ne consegue che la velocità raggiunge il valore massimo a metà distanza tra le lastre, ovvero per $y = h/2$.

Notiamo, infine, che possiamo sostituire

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L}$$

con Δp caduta di pressione alle estremità di un tratto delle due lastre di lunghezza L.



A cura di Gabriele Leggeri