

Studio di una affinità in \mathbb{R}^2

Data nel piano la seguente trasformazione affine

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 3 \\ y' = 5x - 4y + 3 \end{cases}$$

determinare eventuali direzioni invarianti, punti e rette uniti. Se ne dia poi una descrizione geometrica

1) Scrittura in forma matriciale

Possiamo rappresentare la trasformazione affine in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dove indichiamo la matrice lineare con A e il vettore traslazione con \vec{b}

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Ricerca di punti fissi

Un punto $P(x, y)$ è fisso se $P' = P$

$$\begin{cases} x = 4x - 3y + 3 \\ y = 5x - 4y + 3 \end{cases}$$

Riorganizzando

$$\begin{cases} 0 = 3x - 3y + 3 \\ 0 = 5x - 5y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = -3/5 \end{cases}$$

da cui si evince che il sistema non ha soluzione. Pertanto, non ci sono punti fissi.

3) Ricerca di direzioni invarianti

Una direzione $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ è invariante se è un autovettore di A , ovvero se vale

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 5 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-4 - \lambda) - (-3)(5) = \lambda^2 - 1$$
$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

Per $\lambda = 1$

$$(A - I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3u - 3v = 0 \Rightarrow u = v$$

Quindi la direzione invariante corrispondente è $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Per $\lambda = -1$

$$(A + I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 5u - 3v = 0 \Rightarrow v = \frac{5}{3}u$$

La direzione invariante corrispondente è $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

4) Ricerca di rette unite

Il coefficiente angolare di ogni retta unita si ricava dalle componenti del vettore che definisce la rispettiva direzione invariante

Per la retta lungo $\vec{v}_1 = (1,1)$ si ha

$$m_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = 1 \Rightarrow y = x + q_1$$

Applicando la trasformazione

$$y' = 5x - 4y + 3 = 5x - 4(x + q_1) + 3 = 5x - 4x - 4q_1 + 3 = x - 4q_1 + 3$$

Affinché la retta sia unita è sufficiente che siano uguali le coordinate y e y' in quanto l'autovalore associato a questa direzione è $+1$

$$y' = y \Rightarrow x - 4q_1 + 3 = x + q_1 \Rightarrow q_1 = 3/5$$

La retta unita è quindi $y = x + \frac{3}{5}$

Per la retta lungo $\vec{v}_2 = (3,5)$ si ha

$$m_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + q_2$$

Applicando la trasformazione

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 3 \\ y' = 5x - 4y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x - 3q_2 + 3 \\ y' = -\frac{5}{3}x - 4q_2 + 3 \end{cases}$$

Poiché l'autovalore associato è -1 , la condizione per avere una retta unita è che i punti della retta siano trasformati secondo:

$$(x', y') = -(x, y) + (a, b)$$

dove (a, b) è un generico vettore di traslazione lungo la direzione invariante.

Confrontando le componenti otteniamo:

$$x' = -x + a \Rightarrow -x + a = -x - 3q_2 + 3 \Rightarrow a = -3q_2 + 3$$

$$y' = -\frac{5}{3}x + b \Rightarrow -\frac{5}{3}x + b = -\frac{5}{3}x - 4q_2 + 3 \Rightarrow b = -4q_2 + 3$$

Infine, affinché la traslazione mantenga la retta lungo la stessa direzione, il vettore (a, b) deve essere proporzionale alla direzione $\vec{v}_2 = (3,5)$

$$(a, b) = k(3,5) \Rightarrow a = 3k, b = 5k$$

E allora, sostituendo

$$\begin{cases} a = -3q_2 + 3 \\ b = -4q_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k = -3q_2 + 3 \\ 5k = -4q_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ q_2 = 2 \end{cases}$$

La retta unita è quindi $y = \frac{5}{3}x + 2$

5) Riepilogo e descrizione geometrica della trasformazione

- Non ci sono punti fissi
- Direzioni invarianti: $\vec{v}_1 = (1,1)$ e $\vec{v}_2 = (3,5)$
- Rette unite: $y = x + \frac{3}{5}$ e $y = \frac{5}{3}x + 2$
- Si può interpretare come combinazione di dilatazione lungo le direzioni invarianti e traslazione

A cura di Gabriele Leggeri

