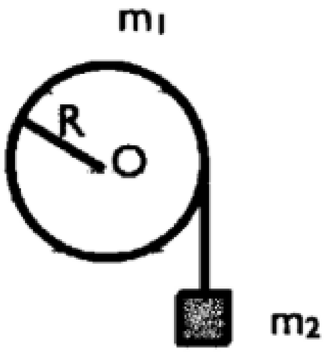
Massa appesa con carrucola reale



Un cilindro omogeneo di massa $m_1 = 1$ kg e raggio $R = 20$ cm è disposto in modo da ruotare intorno ad un asse fisso, ortogonale al piano della pagina, passante per il suo centro di massa O. Tale rotazione avviene con attrito costante nel tempo. Sul cilindro è avvolto un filo inestensibile, di massa trascurabile, che non slitta e alla cui estremità inferiore è appeso un corpo di massa $m_2 = 2$ kg. Partendo tutto da fermo si osserva che quando il corpo è sceso di $h = 10$ cm, il cilindro si trova a ruotare con velocità angolare $\omega_0 = 3$ rad/s. Solo in questo momento viene tagliato il filo.

a) Determinare il momento delle forze di attrito
b) Determinare dopo quanto tempo il cilindro si ferma

1) Dati del problema

$m_1 = 1$ kg
$R = 0{,}2$ m
$m_2 = 2$ kg
$h = 0{,}1$ m
$\omega_0 = 3$ rad/s

Il cilindro è omogeneo, quindi il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per il centro vale

$$I = \frac{1}{2} m_1 R^2 = 0{,}02\ \text{kgm}^2$$

2) Collegamento tra discesa del corpo e rotazione del cilindro

Il filo non slitta, quindi la lunghezza h di filo di cui è sceso il corpo coincide con l'arco coperto sul bordo del cilindro

$$h = R\theta$$

da cui

$$\theta = \frac{h}{R} = \frac{0{,}1\ \text{m}}{0{,}2\ \text{m}} = 0{,}5\ \text{rad}$$

Il sistema parte da fermo e l'attrito è costante, quindi anche la coppia resistente è costante e il moto ha accelerazione angolare costante. Usiamo allora la legge della cinematica rotazionale

$$\omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

dove α è l'accelerazione angolare del cilindro durante la fase in cui il corpo scende.
Sostituendo, ricaviamo

$$\alpha = 9\ \text{rad/s}^2$$

3) Tensione del filo durante il moto

La velocità lineare del corpo appeso coincide con la velocità tangenziale del bordo del cilindro

$$v = R\omega_0 = 0{,}6\ \mathrm{m/s}$$

Poiché il moto parte da fermo e l'accelerazione è costante, la sua accelerazione lineare vale

$$a = R\alpha = 1{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Sul corpo di massa m_2 agiscono il peso verso il basso e la tensione verso l'alto. Fissando un asse coordinato orientato in alto, lungo la verticale si ha

$$m_2 g - T = m_2 a$$

da cui

$$T = m_2(g - a) = 16{,}02\ \mathrm{N}$$

4) Calcolo del momento delle forze di attrito

Sul cilindro agiscono due momenti rispetto all'asse di rotazione: il momento motore dovuto alla tensione del filo e il momento resistente dovuto all'attrito. L'equazione della dinamica rotazionale è quindi

$$TR - M_a = I\alpha$$

dove M_a è il momento delle forze di attrito.

Ricaviamo M_a

$$M_a = TR - I\alpha = 3{,}024\ \mathrm{Nm}$$

5) Tempo di arresto dopo il taglio del filo

Quando il filo viene tagliato, non agisce più il momento della tensione ma resta solo il momento resistente dell'attrito, che frena il cilindro con modulo costante M_a. L'accelerazione angolare di frenamento vale

$$\alpha_f = \frac{M_a}{I} = 151{,}2\ \mathrm{rad/s^2}$$

Poiché il cilindro al momento del taglio ha velocità angolare iniziale $\omega_0 = 3\ \mathrm{rad/s}$, il tempo necessario per fermarsi è

$$t = \frac{\omega_0}{\alpha_f} = 0{,}0198\ \mathrm{s}$$

6) Risultati finali

a) $M_a \approx 3{,}02\ \mathrm{Nm}$

b) $t \approx 0{,}02\ \mathrm{s}$

A cura di Gabriele Leggeri