Calcolo di un integrale di linea di seconda specie

Calcolare l'integrale di linea del campo

$$\vec{F} = \left(\frac{x^3 + xy^2 + y}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - x + y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma: \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

orientata nel verso crescente del parametro.

Premessa

Notiamo che γ è un'ellisse (quindi una curva chiusa) percorsa in verso antiorario. L'unica lacuna del campo $\vec{F}$ è nell'origine $(0,0)$ in quanto solo lì si annulla il denominatore delle frazioni che lo descrivono; pertanto, non ci sono punti di γ da escludere.

1) Riscrittura del campo

Indichiamo con $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ rispettivamente la prima e la seconda componente di $\vec{F}$ e osserviamo che è possibile riscriverle come

$$P(x,y) = \frac{x(x^2 + y^2) + y}{x^2 + y^2} = x + \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{(x^2 + y^2) - x}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Quindi il campo si riscrive come

$$\vec{F}(x,y) = \left(x + \frac{y}{x^2 + y^2}, 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

2) Riscrittura dell'integranda

L'integrale di linea di un campo piano si scrive come

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

e pertanto, sostituendo, otteniamo

$$\int_\gamma \left(x + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = \int_\gamma x\,dx + \int_\gamma dy + \int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

I primi due integrali sono immediati: valgono entrambi 0 perché la curva è chiusa

$$\int_\gamma x\,dx = \frac{1}{2}\int_\gamma d(x^2) = 0$$

$$\int_\gamma dy = 0$$

Resta dunque solo

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad (**)$$

Ricordiamo la formula differenziale dell'argomento polare

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

e usiamola per riscrivere $(**)$ come

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = -\int_\gamma d\theta$$

Notiamo poi che la curva γ avvolge l'origine una volta in senso antiorario, quindi la variazione totale dell'angolo θ è

$$\Delta\theta = 2\pi$$

ne segue

$$-\int_\gamma d\theta = -\Delta\theta = -2\pi$$

e quindi il valore dell'integrale di linea è

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = -2\pi$$

3) Controllo diretto con la parametrizzazione

Verifichiamo ora il risultato ottenuto procedendo con il calcolo esplicito dell'integrale $(**)$.
La curva è

$$\gamma: \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}$$

allora vale

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) \\ y'(t) = 3\cos(t) \end{cases}$$

e anche

$$x^2 + y^2 = (2\cos(t))^2 + (3\sin(t))^2 = 4\cos^2(t) + 9\sin^2(t)$$

L'integranda è

$$P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t)$$

dopo sostituzione e opportune semplificazioni si ottiene

$$-4\sin(t)\cos(t) + 3\cos(t) - \frac{6}{4\cos^2(t) + 9\sin^2(t)}$$

e quindi

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = -4\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt + 3\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt - 6\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2(t) + 9\sin^2(t)}$$

Si verifica che i primi due integrali sono nulli, mentre il terzo vale

$$-6\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\cos^2(t)+9\sin^2(t)}=-6\cdot\frac{\pi}{3}=-2\pi$$

che coincide con il risultato ottenuto in precedenza.

A cura di Gabriele Leggeri