# Calcolo di un integrale doppio su un dominio assegnato

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D \left|\sqrt{3}y - x\right| dxdy$$

sul dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$

1) **Osservazioni sul dominio**

   Il dominio $D$ è il semicerchio superiore di raggio 1 e centro l'origine, quindi la scelta più conveniente è parametrizzarlo usando le coordinate polari $(r, \theta)$

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

   con $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ e, naturalmente, Jacobiano $J = r$.

2) **Riscrittura dell'integranda in coordinate polari**

   L'espressione dentro il valore assoluto è

$$\sqrt{3}y - x = \sqrt{3}\big(r\sin(\theta)\big) - r\cos(\theta) = r\left(\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right)$$

   Allora l'integrale diventa

$$I = \int_0^1 r \int_0^\pi \left|\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right| r \, dr d\theta = \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^\pi \left|\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right| d\theta =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \int_0^\pi \left|\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right| d\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi \left|\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right| d\theta$$

3) **Studio del segno dell'argomento del valore assoluto**

   Dobbiamo studiare quando

$$\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta) = 0$$

   ovvero

$$\sqrt{3}\sin(\theta) = \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

   Studiamone ora il segno. Cominciamo notando che per $\theta = 0$ si ha un valore negativo, mentre per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha un valore positivo. Quindi

$$\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$$
$$\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} < \theta \leq \pi$$

In virtù di quanto appena determinato possiamo riscrivere l'integrale come

$$I = \frac{1}{3}\left(\int_0^{\pi/6} \left(\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\right) d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi} \left(\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right) d\theta\right) = \frac{1}{3}(J + K) \qquad (**)$$

**4) Calcolo degli integrali**

<u>Primo integrale *J*</u>

Osserviamo che

$$\int \left(\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\right) d\theta = \sin(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta)$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/6} \left(\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\right) d\theta = \left[\sin(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta)\right]_0^{\pi/6} = 2 - \sqrt{3}$$

<u>Secondo integrale *K*</u>

Anche qui osserviamo che la primitiva è

$$\int \left(\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right) d\theta = -\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$$

Quindi

$$\int_{\pi/6}^{\pi} \left(\sqrt{3}\sin(\theta) - \cos(\theta)\right) d\theta = \left[-\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)\right]_{\pi/6}^{\pi} = \sqrt{3} + 2$$



**5) Somma finale**

Reinserendo tutto in $(**)$ troviamo che

$$I = \frac{1}{3}(J + K) = \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\right) = \frac{4}{3}$$

*A cura di Gabriele Leggeri*