Risoluzione di una disequazione nel campo dei numeri complessi

Risolvere la disequazione

$$\cos(z) > 1$$

con $z \in \mathbb{C}$

Premessa

Dal momento che il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi non è ordinato (non è cioè possibile stabilire quale tra due numeri complessi sia più grande), non ha senso nemmeno impostare una disequazione. Tuttavia, si può interpretare l'esercizio proposto come "trovare i complessi z il cui coseno è un numero reale maggiore di 1", ovvero riconducendolo al campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, in cui una disequazione è perfettamente definita.

Risoluzione dell'interpretazione sensata

Esplicitiamo

$$z = x + iy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$.

Usiamo la formula di Eulero per il coseno complesso

$$\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

Affinché $\cos(z)$ sia un numero reale, deve essere nulla la sua parte immaginaria

$$\sin(x)\sinh(y) = 0$$

<u>Caso 1</u>

$$\sinh(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Allora $z = x + iy = x$ è un numero reale e

$$\cos(z) = \cos(x)$$

Ma per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $\cos(x) \leq 1$ e quindi questo caso non ammette soluzioni.

<u>Caso 2</u>

$$\sin(x) = 0$$

Allora

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e dunque

$$\cos(z) = \cos(k\pi)\cosh(y) = (-1)^k \cosh(y)$$

Ora, siccome

$$\cosh(y) \geq 1$$

si ha $\cos(z) > 1$ solo quando $(-1)^k = 1$, cioè quando k è pari

$$x = 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

e inoltre serve

$$y \neq 0$$

perché $y = 0$ implica $\cos(z) = 1$, non strettamente maggiore di 1.

Risultato finale sotto l'unica interpretazione sensata

Alla luce di quanto illustrato, l'insieme delle soluzioni è quindi

$$z = 2k\pi + iy, \;\; k \in \mathbb{Z}, \;\;\; y \in \mathbb{R}, \;\;\; y \neq 0$$