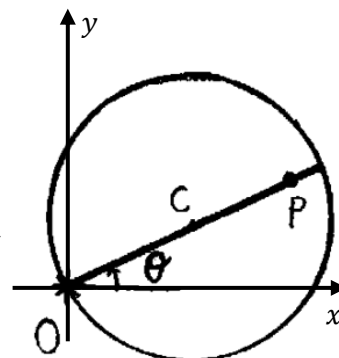


Disco rigido rotante con punto materiale vincolato su guida rettilinea

In un piano verticale, un disco omogeneo di raggio R e massa m è vincolato a ruotare in senso antiorario attorno ad un punto O del suo bordo. Un punto materiale P di massa m è poi vincolato a scorrere lungo una scanalatura coincidente con il diametro passante per O . Trascurando gli attriti e utilizzando come coordinate libere l'angolo θ indicato in figura e la distanza s tra O e P :



- Scrivere l'energia cinetica K del sistema
- Calcolare il momento angolare $\vec{L}_O$ del sistema rispetto al punto O
- Scrivere la lagrangiana del sistema

a) L'energia cinetica del sistema è la somma di quella del punto P e quella del disco.

- Per P vale

$$K_P = \frac{1}{2} m_P v_P^2$$

dove v_P è la velocità scalare di P , che troviamo calcolando la norma del suo vettore velocità, derivata del suo vettore posizione rispetto a O

$$\vec{OP} = (s \cdot \cos(\theta), s \cdot \sin(\theta))$$

Ricordando che sia s che θ dipendono dal tempo, otteniamo

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt} [\vec{OP}] = (\dot{s} \cdot \cos(\theta) - s \cdot \sin(\theta) \dot{\theta}, \dot{s} \cdot \sin(\theta) + s \cdot \cos(\theta) \dot{\theta})$$

$$v_P^2 = \dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2$$

E allora

$$K_P = \frac{1}{2} m_P v_P^2 = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2)$$

- Per quanto riguarda il disco, osserviamo che esso ruota attorno ad O , che è quindi il suo centro di rotazione (che, ricordiamo, è fisso per definizione!). Segue che l'energia cinetica del disco, espressa prendendo O come riferimento, consta della sola componente rotazionale e vale quindi

$$K_{disco} = \frac{1}{2} I_O \omega_{disco}^2$$

dove I_O è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione, perpendicolare al piano in cui è contenuto il disco e passante per O . Sfruttando il teorema di Huygens si ricava che

$$I_O = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

Per quanto riguarda la velocità angolare, vale semplicemente $\omega_{disco}^2 = \dot{\theta}^2$

Possiamo quindi scrivere che

$$K_{disco} = \frac{1}{2} I_O \omega_{disco}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$$

b) Il momento angolare del sistema è la somma di quello del punto P e quello del disco.

- Per il punto P , usiamo la definizione di momento angolare e otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{L}_O^P &= \vec{OP} \times m\vec{v}_P = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ s \cdot \cos(\theta) & s \cdot \sin(\theta) & 0 \\ m(\dot{s} \cdot \cos(\theta) - s \cdot \sin(\theta) \dot{\theta}) & m(\dot{s} \cdot \sin(\theta) + s \cdot \cos(\theta) \dot{\theta}) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= ms^2 \dot{\theta} \hat{z}\end{aligned}$$

- Per considerazioni analoghe a quelle fatte per il calcolo di K_{disco} , vale

$$\vec{L}_O^{disco} = I_O \vec{\omega}_{disco} = \frac{3}{2} mR^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

dove vale $\vec{\omega}_{disco} = \dot{\theta} \hat{z}$ in quanto il disco ruota in senso antiorario

c) Calcoliamo innanzitutto l'energia potenziale U del sistema

$$U = mgy_C + mgy_P = mg \left(\frac{s}{2} \sin(\theta) + s \cdot \sin(\theta) \right) = mg(R + s) \sin(\theta)$$

E allora la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = K - U = \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2) + \frac{3}{4} mR^2 \dot{\theta}^2 - mg(R + s) \sin(\theta)$$

Riepiloghiamo i risultati ottenuti

- Energia cinetica del sistema

$$K = \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2) + \frac{3}{4} mR^2 \dot{\theta}^2 = \frac{m}{4} ((2s^2 + 3R^2) \dot{\theta}^2 + 2\dot{s}^2)$$

- Momento angolare del sistema rispetto a O

$$\vec{L}_O = ms^2 \dot{\theta} \hat{z} + \frac{3}{2} mR^2 \dot{\theta} \hat{z} = m\dot{\theta} \left(s^2 + \frac{3}{2} R^2 \right) \hat{z}$$

- Lagrangiana del sistema

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2) + \frac{3}{4} mR^2 \dot{\theta}^2 - mg(R + s) \sin(\theta) = \\ &= m \left(\frac{1}{2} \dot{s}^2 + \left(\frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{4} R^2 \right) \dot{\theta}^2 - g(R + s) \sin(\theta) \right)\end{aligned}$$