Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione di una trave piana soggetta a un carico distribuito triangolare

Tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione per il sistema a lato, utilizzando i dati forniti direttamente in *Figura 1*.

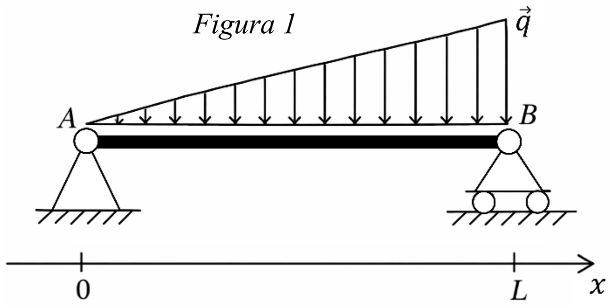


Figura 1

1) Cominciamo osservando che la trave è isostatica: la molteplicità totale dei vincoli ($M = 2 + 1 = 3$ in quanto ci sono una cerniera in A e un carrello in B) è pari ai gradi di libertà del sistema ($G = 3$ essendo la trave un corpo rigido bidimensionale)

2) Dobbiamo ora risolvere il problema statico
   - Il modulo q del carico segue la legge
   $$q(x) = \frac{q}{L}x$$
   siccome esso è triangolare (varia cioè come una retta, il cui coefficiente angolare, in questo caso specifico, è dato dal rapporto tra il carico in B, pari a q, e la distanza AB, pari a L
   - Il carico concentrato equivalente a $\vec{q}$ ha quindi modulo
   $$R = \int_0^L \frac{q}{L}x\,dx = \frac{q}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{q}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{qL}{2}$$
   e va applicato a distanza x_R da A pari a
   $$x_R = \frac{1}{R}\int_0^L x\frac{q}{L}x\,dx = \frac{2}{qL}\frac{q}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{L^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{2}{L^2}\frac{L^3}{3} = \frac{2}{3}L$$
   - Sostituendo ai vincoli le loro reazioni e al carico distribuito il suo concentrato equivalente si ottiene il diagramma in *Figura 2*

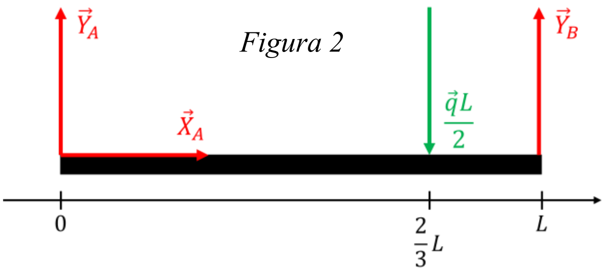


Figura 2

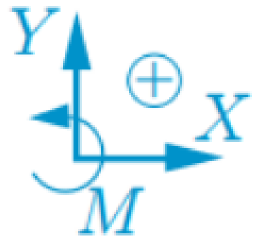


Figura 3

   - Allora, scelto A come polo dei momenti e adottata la convenzione sui segni illustrata in *Figura 3*, il problema statico assume la forma

$$\begin{cases} \Sigma\vec{X} = \vec{0} \\ \Sigma\vec{Y} = \vec{0} \\ \Sigma\vec{M}_A = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - \dfrac{qL}{2} = 0 \\ -\dfrac{qL}{2}\cdot\dfrac{2}{3}L + Y_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = \dfrac{qL}{6} \\ Y_B = \dfrac{qL}{3} \end{cases}$$

3) Le caratteristiche di sollecitazione sono allora

- Sforzo normale

  $\boldsymbol{N(x) = 0}$

- Sforzo di taglio

  $$\boldsymbol{T(x)} = Y_A - \int_0^x q(x)\,dx = Y_A - \frac{q}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = Y_A - \frac{q}{L}\frac{x^2}{2} = \boldsymbol{\frac{qL}{6} - \frac{q}{2L}x^2}$$

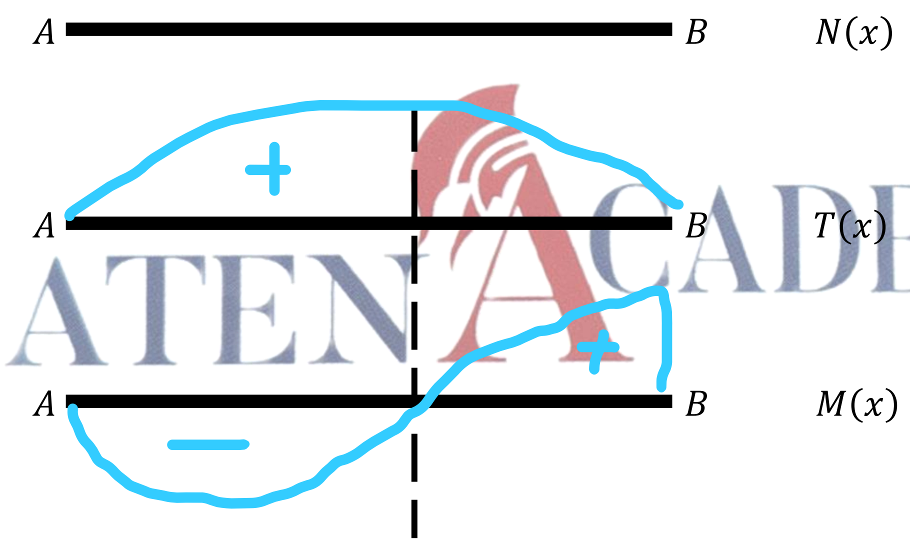
  Essendo $-\int_0^x q(x)\,dx$ la forza verticale, dovuta al carico $\vec{q}$, che grava sul tratto di trave compreso tra 0 e x

- Momento flettente

  $$\boldsymbol{M(x)} = Y_A x - \int_0^x q(x)\,dx \cdot \left(x - \frac{2}{3}x\right) = Y_A x - \frac{q}{L}\frac{x^2}{2}\left(x - \frac{2}{3}x\right) = \boldsymbol{\frac{qL}{6}x - \frac{q}{6L}x^3}$$

  Essendo x il braccio di Y_A rispetto al polo A e $\left(x - \frac{2}{3}x\right)$ il braccio, sempre rispetto ad A, della forza dovuta al carico $\vec{q}$ sul tratto di trave compreso tra 0 e x

4) I relativi diagrammi sono quindi



dai quali osserviamo che, come prevede la teoria, la funzione momento presenta uno zero in corrispondenza di un estremo della funzione taglio.